DM 2 – Géométrie dans l'espace

3A – à rendre le mardi 3 novembre

Je n'ai pas imprimé ce devoir à cause de la longueur de son énoncé et car je pense qu'il est mieux de le consulter en couleur. Vous retrouverez donc l'énoncé du devoir maison à l'adresse :

http://mathematiques.lfsl.free.fr/spip.php?article264

Vous devez répondre aux différentes questions écrites en violet. Des indications vous sont données à la fin de la première et de la troisième partie. Autre indication : pensez à utiliser le cosinus d'un angle, cela vous servira plusieurs fois.

Ce devoir sera noté sur 20, et l'évaluation tiendra compte de votre prise d'initiatives. Cela signifie que même si vous ne savez pas répondre à une question, essayez de prendre des initiatives et testez différentes méthodes ; même elles n'aboutissent pas, rédigez proprement vos recherches sur votre copie, j'en tiendrai compte dans l'évaluation.

Les trois parties sont indépendantes.

Une dernière chose : si vous voulez me poser une question sur ce devoir, n'hésitez pas à le faire via mon adresse mail professionnelle : jloupia@lfsl.net

Bon courage !

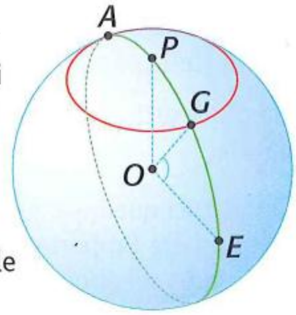
Première partie : Aller d’un point à un autre sur la Terre

Avion au décollage

De Londres aux Aléoutiennes

Un pilote d'avion décollant de l'aéroport de Londres situé à moins de 5 km de Greenwich (G) doit atterrir sur celui de l'île d'Amchitka (A) qui fait partie des Aléoutiennes et a pour longitude environ 180°E.

P représente le Pôle Nord et E est le point de l'équateur sur le méridien de Greenwich.



Ces deux aéroports ont à peu près la même latitude 51°30'N. On considère que le rayon de la Terre vaut 6 378 km.

1. La « loxodromie »

Le pilote maintient son avion sur le même parallèle (tracé en rouge) et garde le même cap.

Quelle est la longueur de ce parallèle ? Quelle distance doit-il parcourir en le suivant ?

2. L'« orthodromie »

Le méridien de Greenwich et celui de 180°E forment un grand cercle de la sphère (tracé en vert), car le centre et le rayon sont les mêmes que ceux de la sphère. On peut donc envisager pour le pilote d'aller vers le Nord, passer par le pôle, puis continuer vers le Sud jusqu'à Amchitka.

Quelle est alors la distance parcourue ?

3. Le mille marin

La distance qui sépare deux points qui sont sur le même méridien et dont l'écart de latitude est de une minute s'appelle un mille marin (ou « mille nautique », à ne pas confondre avec le mille anglais, plus court).

Quelle est la valeur d'un mille marin ? Combien le pilote doit-il en parcourir s'il passe par le pôle ?

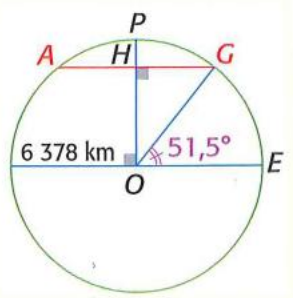
Voici quelques indications pour répondre à ces 3 questions :

1. Le parallèle cherché dont $[AG]$ est un diamètre (car A et G sont sur deux méridiens diamétralement opposés) est l'intersection de la sphère terrestre avec un plan perpendiculaire à la ligne des pôles. Son centre H est tel que la droite (OH) est perpendiculaire à la droite (AG). Calculer la longueur HG dans le triangle GHO, puis la longueur du cercle de rayon $[HG]$ et enfin la distance cherchée.

2. Calculer le périmètre de la Terre, puis la valeur de l'angle $\widehat{GOA}$ et en déduire la mesure de l'arc $\overset{\frown}{GA}$.

3. Il suffit de savoir que 1° vaut 60'. La mesure, en degré, trouvée à la question précédente, permet de calculer le nombre de milles parcourus par le pilote.

La Terre est représentée par un cercle de centre O et de rayon 6378 km (voir ci-contre).



Deuxième partie : La géométrie de la Terre

Une devinette :

Un photographe voit un ours. Il parcourt donc un mille vers le Sud pour prendre l'équipement adapté dans sa cabane, parcourt ensuite un mille vers l'Ouest pour prévenir son village. Il lui suffit enfin de parcourir un mille au Nord pour retrouver l'ours là où il l'a vu.

? *Quelle est la couleur de l'ours ?*

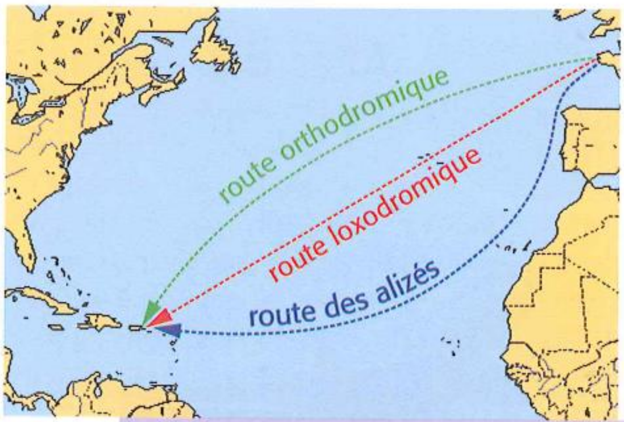
Question annexe : Quelle est la nature du triangle parcouru par le chasseur et, en particulier, que dire de la somme de ses angles ?

Du fait que la Terre est (presque) une sphère et non un plan, il faut en tenir compte quand on veut calculer des distances ! Le plus court chemin pour aller d'un point à un autre est rarement celui qui consiste à garder le même cap et cela, même si les deux points ont la même latitude, comme dans l'exemple étudié ci-dessus.

En fait, on peut démontrer qu'il n'existe qu'un grand cercle de la sphère passant par deux points donnés et que le plus court chemin est de le suivre !

Dans l'exemple donné à la page 259, ce grand cercle coïncide avec les méridiens, mais ce n'est pas toujours le cas et le calcul est alors bien plus difficile.

La plupart des cartes géographiques privilégient la distance loxodromique (conservation du cap) et cela est suffisant pour de faibles distances. Mais dès que l'on veut la distance orthodromique (la plus courte), il faut représenter la Terre autrement.



Lors de la « Route du rhum », les navigateurs ont le choix entre la route des alizés, la route loxodromique et la route orthodromique

Ainsi, dans la course de la « Route du rhum » (voir ci-dessus), les navigateurs ont le choix entre :

- la route des alizés (4500 milles) qui est la route des vents, donc rapide ;
- la route loxodromique (3584 milles) qui est la ligne droite sur la carte ;
- la route orthodromique (3540 milles) qui est la plus courte.

On voit ici quelques particularités de la géométrie de la sphère (importante, car les planètes ont une forme à peu près sphérique) bien différente de la géométrie dans le plan.

Route du Rhum : le trimaran de Laurent Bourgnon

Troisième partie : L'Eurotunnel

Entrée de l'Eurotunnel à la gare de Calais

L'Eurotunnel construit sous la mer, au niveau du Pas de Calais séparant la Manche et la mer du Nord a une longueur d'environ 50 km.
On suppose qu'il est en ligne droite et coïncide exactement avec une corde de la sphère terrestre (de rayon 6 378 km).

Quel angle au centre de la Terre intercepte la corde symbolisant l'Eurotunnel ?

Quel angle l'Eurotunnel fait-il avec l'horizontale à l'extrémité ?

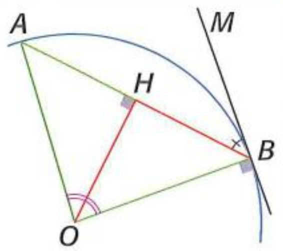
La longueur de l'arc de cercle qui passe sur la mer est-elle plus longue que le tunnel ? De combien ?

Quelle est la hauteur maximale qui sépare le tunnel de la surface de la mer ?

Voici d'autres indications pour répondre à ces différentes 3 questions :

On représente la Terre par un cercle de centre O ;
A et B sont les deux extrémités du tunnel, avec :
$OA = OB = 6378$ km
et $AB = 50$ km.

(MB) représente l'horizontale en B, H est le pied de la hauteur issue de O dans le triangle ABO.



1. Déterminer la longueur AH et en déduire la mesure de l'angle $\widehat{AOH}$, puis celle de l'angle $\widehat{AOB}$. et $\widehat{OAH}$
2. Pour déterminer l'angle $\widehat{ABM}$, déterminer l'arc intercepté par cet angle inscrit.
3. Calculer la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ pour la comparer avec celle du segment $[AB]$.
4. Calculer la longueur OH, puis répondre à la dernière question.