Fonction logarithme - Annales corrigées
TS –2010

D'après **http://www.apmep.asso.fr/spip.php?rubrique346**
Les corrigés se trouvent sur ce site.

Polynésie septembre 2009

EXERCICE 4 **7 points**

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f_n(x) = -nx - x\ln x.$$

On note $(\mathscr{C}_n)$ la courbe représentative de la fonction f_n, dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
Les courbes $(\mathscr{C}_0)$, $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ représentatives des fonctions f_0, f_1 et f_2 sont données en annexe.
On rappelle que $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$.

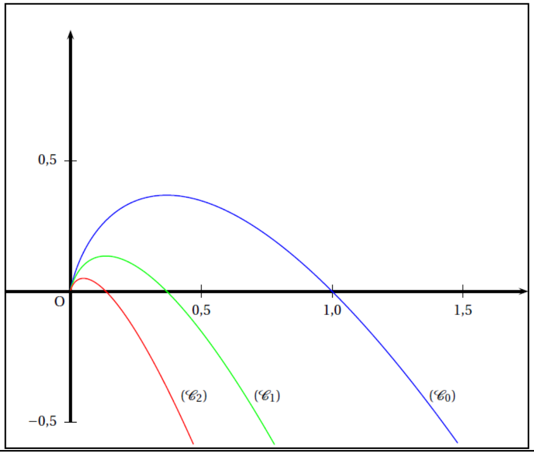
Partie A : Étude de la fonction f_0 définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f_0(x) = -x\ln x$.

1. Déterminer la limite de f_0 en $+\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction f_0 sur $]0\,;\,+\infty[$.

Partie B : Étude de certaines propriétés de la fonction f_n, n entier naturel.

Soit n un entier naturel.

1. Démontrer que pour $x \in]0\,;\,+\infty[$, $f_n'(x) = -n-1-\ln x$ où f_n' désigne la fonction dérivée de f_n.
2. **a.** Démontrer que la courbe $(\mathscr{C}_n)$ admet en un unique point A_n d'abscisse e^{-n-1} une tangente parallèle à l'axe des abscisses.
   b. Prouver que le point A_n appartient à la droite Δ d'équation $y = x$.
   c. Placer sur la figure en annexe les points A_0, A_1, A_2.
3. **a.** Démontrer que la courbe $(\mathscr{C}_n)$ coupe l'axe des abscisses en un unique point, noté B_n, dont l'abscisse est e^{-n}.
   b. Démontrer que la tangente à $(\mathscr{C}_n)$ au point B_n a un coefficient directeur indépendant de l'entier n.
   c. Placer sur la figure en annexe les points B_0, B_1, B_2.



Antilles Guyane juin 2010

EXERCICE 4 **6 points**
Commun à tous les candidats

Partie A

Soit g la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = x - x\ln x.$$

1. Déterminer les limites de la fonction g en 0 et $+\infty$.
2. Montrer que g est dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ et que $g'(x) = -\ln x$.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction g.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{\mathrm{e}^n}{n^n}$.

1. Conjecturer, à l'aide de la calculatrice :
   a. le sens de variation de la suite (u_n) ;
   b. la limite éventuelle de la suite (u_n).
2. Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $v_n = \ln(u_n)$.
   a. Montrer que $v_n = n - n\ln n$.
   b. En utilisant la **Partie A**, déterminer le sens de variation de la suite (v_n).
   c. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
3. Montrer que la suite (u_n) est bornée.
4. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Liban juin 2010

EXERCICE 4 **6 points**

Partie A

Soit u la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$u(x) = x^2 - 2 + \ln x.$$

1. Étudier les variations de u sur $]0\,;\,+\infty[$ et préciser ses limites en 0 et en $+\infty$.
2. a. Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique sur $]0\,;\,+\infty[$. On note α cette solution.
   b. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.
3. Déterminer le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x.
4. Montrer l'égalité : $\ln\alpha = 2 - \alpha^2$.

Partie B

On considère la fonction f définie et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x^2 + (2 - \ln x)^2.$$

On note f' la fonction dérivée de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

1. Exprimer, pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x)$ en fonction de $u(x)$.
2. En déduire les variations de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

Partie C

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, on note :

- Γ la courbe représentative de la fonction ln (logarithme népérien) ;
- A le point de coordonnées $(0\,;\,2)$;
- M le point de Γ d'abscisse x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$.

1. Montrer que la distance AM est donnée par A$M = \sqrt{f(x)}$.
2. Soit g la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \sqrt{f(x}$.
   a. Montrer que les fonctions f et g ont les mêmes variations sur $]0\,;\,+\infty[$.
   b. Montrer que la distance AM est minimale en un point de Γ, noté P, dont on précisera les coordonnées.
   c. Montrer que AP $= \alpha\sqrt{1+\alpha^2}$.
3. *Pour cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   La droite (AP) est-elle perpendiculaire à la tangente à Γ en P ?

La Réunion juin 2010

EXERCICE 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = 1 + \ln(1+x).$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthononnal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
On note D la droite d'équation $y = x$.

Partie A

1. a. Étudier le sens de variation de la fonction f.
   b. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
2. On désigne par g la fonction définie sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.
   a. Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to -1} g(x)$.
   b. Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x}$. En déduire $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} g(x)$.
   c. Étudier le sens de variation de la fonction g, puis dresser le tableau de variations de la fonction g.
   d. Montrer que sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β, avec α négative et β appartenant à l'intervalle $[2\,;\,3]$.
   e. À l'aide des questions précédentes, détenniner le signe de $g(x)$. En déduire la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite D.

Partie B

Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Soit (u_n) la suite définie pour tout nombre entier naturel n par : $\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 2 \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \end{array}\right.$

1. Montrer que, pour tout nombre entier naturel n, $2 \leqslant u_n \leqslant \beta$.
2. La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.