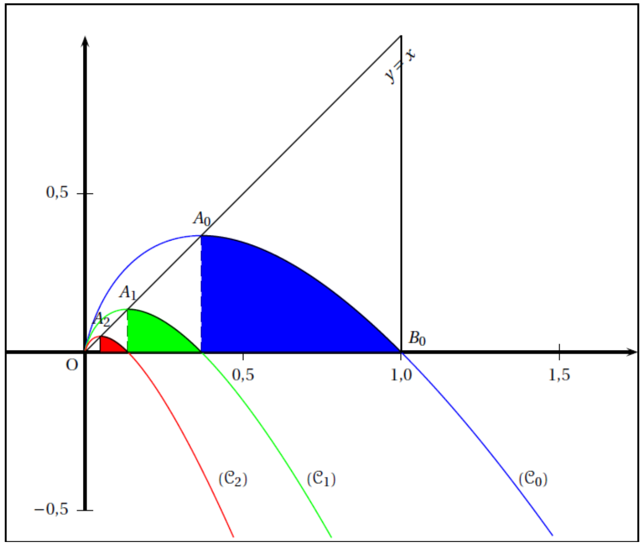
Polynésie septembre 2009

Partie A : Étude de la fonction f_0 définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f_0(x) = -x\ln x$.

1. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} -nx = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -x\ln x = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.
2. On a $f_0(x) = -x\ln x$; produit de fonctions dérivables elles est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et
   $f_0'(x) = -\ln x - x\times\dfrac{1}{x} = -\ln x - 1$.
   Or $-\ln x - 1 \geqslant 0 \iff \ln x \leqslant -1 \iff nx \leqslant \ln \mathrm{e}^{-1} \iff x \leqslant \mathrm{e}^{-1}$.
   Donc sur $\left]0\,;\,\mathrm{e}^{-1}\right]$, $f_0'(x) \geqslant 0$, $f_0'\left(\mathrm{e}^{-1}\right) = 0$ et sur $\left]\mathrm{e}^{-1}\,;\,+\infty\right[$, $f_0'(x) < 0$. Donc croissance puis décroissance ce qui correspond bien au dessin donné.

Partie B : Étude de certaines propriétés de la fonction f_n, n entier naturel.

1. Comme $f_n(x) = f_0(x) - nx$, $f_n'(x) = f_0'(x) - n = -\ln x - 1 - n$.
2. **a.** La courbe a un extremum quand la dérivée de la fonction s'annule soit si $-\ln x - 1 - n = 0 \iff \ln x = -n-1 \iff \ln x = \ln \mathrm{e}^{-n-1} \iff x = \mathrm{e}^{-n-1}$.
   Conclusion : quel que soit $n\in\mathbb{N}$, la courbe $(\mathcal{C}_n)$ a un seul extremum : le point d'abscisse e^{-n-1}.
   b. On a $f_n\left(\mathrm{e}^{-n-1}\right) = -n\mathrm{e}^{-n-1} - \mathrm{e}^{-n-1}\ln\left(\mathrm{e}^{-n-1}\right) = -n\mathrm{e}^{-n-1} - (-n-1)\mathrm{e}^{-n-1} = -n\mathrm{e}^{-n-1} + n\mathrm{e}^{-n-1} + \mathrm{e}^{-n-1} = \mathrm{e}^{-n-1}$.
   Pour chaque point A_n, l'ordonnée est égale à l'abscisse, donc A_n appartient à la droite d'équation $y = x$.
   c. Cf. la figure
3. **a.** $(\mathcal{C}_n)$ coupe l'axe des abscisses si et seulement si $-nx - x\ln x = 0 \iff -x(n+\ln x) = 0 \iff n + \ln x = 0$ (car $x \neq 0$) $\iff \ln x = -n \iff \ln x = \ln \mathrm{e}^{-n} \iff x = \mathrm{e}^{-n}$ (par croissance de la fonction ln).
   b. La tangente à $(\mathcal{C}_n)$ au point B_n a un coefficient directeur égal à $f_n'\left(\mathrm{e}^{-n}\right) = -n - 1 - \ln \mathrm{e}^{-n} = -n - 1 - (-n) = -1$. Ce coefficient est indépendant de n et donne une pente de 45 °avec l'axe des abscisses.



Antilles Guyane juin 2010

Partie A

1. **Limite en 0.**
   D'après le théorème des croissances comparées $\lim\limits_{x\to0} x\ln x = 0$, donc, par opérations sur les limites : $\lim\limits_{x\to0} g(x) = 0$.
   Limite en $+\infty$.
   On peut écrire, pour tout réel $x > 0$: $g(x) = x(1-\ln x)$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-\ln x) = -\infty$, donc, par produit des limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.
2. La fonction g est dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ comme combinaison simple de fonctions qui le sont, et, pour tout $x > 0$:
   $$g'(x) = 1 - \left(\ln x + x\times\frac{1}{x}\right) = -\ln x.$$
3. Soit $x > 0$, on sait que $\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$; d'où le tableau de variations de g :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
g	$\Vert$ 0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Partie B

1. À l'aide de la calculatrice, on obtient les valeurs suivantes :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
u_n	2,718	1,847	0,744	0,213	0,047	00865	0,001 78	0,000 178	0,000 002

On peut donc conjecturer que :

a. la suite (u_n) est décroissante ;

b. la suite (u_n) converge vers 0.

2. **a.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_n = \ln(u_n) = \ln\left(\frac{e^n}{n^n}\right) = \ln\left(e^n\right) - \ln\left(n^n\right) = n\ln e - n\ln n = n - \ln n = g(n).$$

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors $1 \leqslant n < n+1$, et comme la fonction g est strictement décroissante sur $[1;+\infty[$, alors : $g(1) \geqslant g(n) > g(n+1)$ ce qui équivaut à $1 \geqslant v_n > v_{n+1}$. Ceci prouve que la suite (v_n) est décroissante.

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \ln(u_n)$, donc $u_n = e^{v_n}$. De plus, d'après la question précédente, $v_n > v_{n+1}$, donc par application de la fonction exponentielle (strictement croissante sur $\mathbb{R}$) : $e^{v_n} > e^{v_{n+1}}$, c'est-à-dire $u_n > u_{n+1}$ et la suite (u_n) est donc décroissante.

3. La suite (u_n) est postive de façon évidente, elle est donc minorée.
La suite (u_n) est décroissante, elle est donc majorée par son premier terme $u_1 = e$.
La suite (u_n) est donc bornée.

4. La suite (u_n) est décroissante et minorée, elle est donc convergente.
Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = e^{v_n} = e^{g(n)}$.
D'après la partie A, $\lim\limits_{n\to+\infty} g(n) = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$, donc, par composition des limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{g(n)} = 0$, ce qui prouve que la suite (u_n) a pour limite 0.

Liban juin 2010

1. La fonction u est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables et pour tout réel x strictement positif, $u'(x) = 2x + \frac{1}{x}$. Pour tout réel x strictement positif, $u'(x) > 0$ comme somme de termes positifs (dont l'un est non nul), la fonction u est donc strictement croissante.
$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - 2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = +\infty$.
$\lim\limits_{x\to 0} x^2 - 2 = -2$ et $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0} u(x) = -\infty$.

2. **a.** La fonction u est continue sur $]0\ ;\ +\infty[$, elle prend des valeurs positives (car $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = +\infty$) et des valeurs négatives (car $\lim\limits_{x\to 0} u(x) = -\infty$), selon le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction u s'annule au moins une fois. Comme de plus, la fonction est strictement croissante, elle ne s'annule qu'une seule fois. Donc l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique sur $]0\ ;\ +\infty[$.
On note α cette solution.

b. À l'aide de la calculatrice on remarque que $u(1,31) < 0 < u(1,32)$ donc $1,31 < \alpha < 1,32$

3. Puisque u est croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$, pour tout $x \in]0\ ;\ \alpha[$, $u(x) < u(\alpha)$ donc $u(x) < 0$ et pour tout $x > \alpha$, $u(x) > u(\alpha)$ donc $u(x) > 0$

4. $u(\alpha) = 0 \iff \alpha^2 - 2 + \ln(\alpha) = 0 \iff \ln(\alpha) = 2 - \alpha^2$.

Partie B

On considère la fonction f définie et dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x^2 + (2 - \ln x)^2.$$

On note f' la fonction dérivée de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.

1. Pour tout x de $]0\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = 2x + 2\times(2-\ln x)\times\frac{-1}{x} = \frac{2}{x}(x^2 - 2 + \ln x) = \frac{2}{x}u(x)$

2. $\frac{2}{x}$ étant toujours positif sur $]0\ ;\ +\infty[$, $f'(x)$ est du signe de $u(x)$, donc est strictement négative sur $]0\ ;\ \alpha[$, et strictement positive sur $]\alpha\ ;\ +\infty[$ et s'annule en α. la fonction f est strictement décroissante sur $]0\ ;\ \alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha\ ;\ +\infty[$ et atteint un minimum en α.
$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (2-\ln x)^2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
$\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 02$ et $\lim\limits_{x\to 0} (2-\ln x)^2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0} u(x) = +\infty$.

Partie C

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on note :

- Γ la courbe représentative de la fonction ln (logarithme népérien) ;
- A le point de coordonnées $(0\ ;\ 2)$;
- M le point de Γ d'abscisse x appartenant à $]0\ ;\ +\infty[$.

1. Le point A a pour coordonnées $(0\ ;\ 2)$ et le point $M(x\ ;\ \ln x)$, donc $AM = \sqrt{(x-0)^2 + (\ln x - 2)^2} = \sqrt{f(x)}$

2. Soit g la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x)=\sqrt{f(x)}$.

- **a.** La fonction $\sqrt{\ }$ étant strictement croissante sur son ensemble de définition, et la fonction f prenant des valeurs toujours positives, les fonctions f et $g=\sqrt{f}$ ont même sens de variation.
- **b.** La fonction g atteint donc son minimum en α. La distance AM est donc minimale pour $x=\alpha$ soit au point $\mathrm{P}(\alpha\,;\,\ln\alpha)$. Or $\ln\alpha=2-\alpha^2$ donc P a pour coordonnées $(\alpha\,;\,2-\alpha^2)$.
- **c.** $\mathrm{AP}=\sqrt{(\alpha-0)^2+(2-\alpha^2-2)^2}=\sqrt{\alpha^2+\alpha^4}=\alpha\sqrt{1+\alpha^2}$ (car $\alpha>0$).

3. *Pour cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

La tangente à Γ en P a pour coefficient directeur $\dfrac{1}{\alpha}$ et la droite AP a pour coefficient directeur $\dfrac{y_P-y_A}{x_P-x_A}=\dfrac{2-\alpha^2-2}{\alpha-0}=-\alpha$. Le produit des deux coefficients directeurs donne -1, la tangente Γ en P et la droite (AP) sont perpendiculaires.

La Réunion juin 2010

Partie A

1. (a) Sens de variation de la fonction f :

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}>0 \text{ sur }]-1\,;\,+\infty[$$

La fonction f est donc croissante sur $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$

(b) Limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition :

$$\lim_{x\to-1^+} f(x)=-\infty \text{ car } \lim_{x\to-1^+} 1+x=0^+ \text{ et } \lim_{x\to-1^+}\ln(1+x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \text{ car } \lim_{x\to+\infty} 1+x=+\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty}\ln(1+x)=+\infty$$

Tableau de variations de f :

x	-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2. On désigne par g la fonction définie sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ par $g(x)=f(x)-x$.

(a) $\lim\limits_{x\to-1} g(x)=-\infty$:

$$\lim_{x\to-1} g(x)=\lim_{x\to-1} 1-x+\ln(1+x)=-\infty \text{ car } \lim_{x\to-1^+} 1+x=0^+,\ \lim_{x\to-1^+}\ln(1+x)=-\infty \text{ et } \lim_{x\to-1} 1-x=2$$

(b)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{1+x}=0 \text{ car } \lim_{x\to+\infty} 1+x=+\infty \text{ et } \lim_{X\to+\infty}\frac{\ln X}{X}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}=\lim_{x\to+\infty}(1+x)\left(\frac{1-x}{1+x}+\frac{\ln(1+x)}{1+x}\right)=-\infty \text{ car } \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{1+x}=0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty}\frac{1-x}{1+x}=-1$$

(c) Sens de variation de la fonction g

$$g'(x)=f'(x)-1=\frac{1}{1+x}-1=\frac{-x}{1+x} \text{ du signe de } -x \text{ sur }]-1\,;\,+\infty[$$

La fonction g est donc strictement croissante sur $]-1;0[$ et strictement décroissante sur $]0;\,+\infty[$.
Elle possède une tange,nte horizonate au point d'abscisse 0.
Tableau de variations de la fonction g :

x	-1		α		0		β		$+\infty$
$f'(x)$		$+$			0		$-$		
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Sur l'intervalle $]-1\,;\,0[$, la fonction g est continue, comme somme et composée de fonctions continues, et strictement croissante. Elle réalise donc une bijection de $]-1\,;\,0[$ sur $]-\infty\,;\,1[$. Or 0 appartient à l'ensemble d'arrivée $]-\infty\,;\,1[$. Donc, 0 possède un unique antécédent, noté α dans $]-1\,;\,0[$.
Sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, la fonction g est continue, comme somme et composée de fonctions continues, et strictement décroissante. Elle réalise donc une bijection de $]0\,;\,+\infty[$ sur $]-\infty\,;\,1[$. Or 0 appartient à l'ensemble d'arrivée $]-\infty\,;\,1[$. Donc, 0 possède un unique antécédent, noté β dans $]0\,;\,+\infty[$.
De plus :

$$\begin{cases} g(2)\simeq 0{,}0986>0\\ g(3)\simeq -0{,}614<0\end{cases} \Longrightarrow 2\leqslant\beta\leqslant 3$$

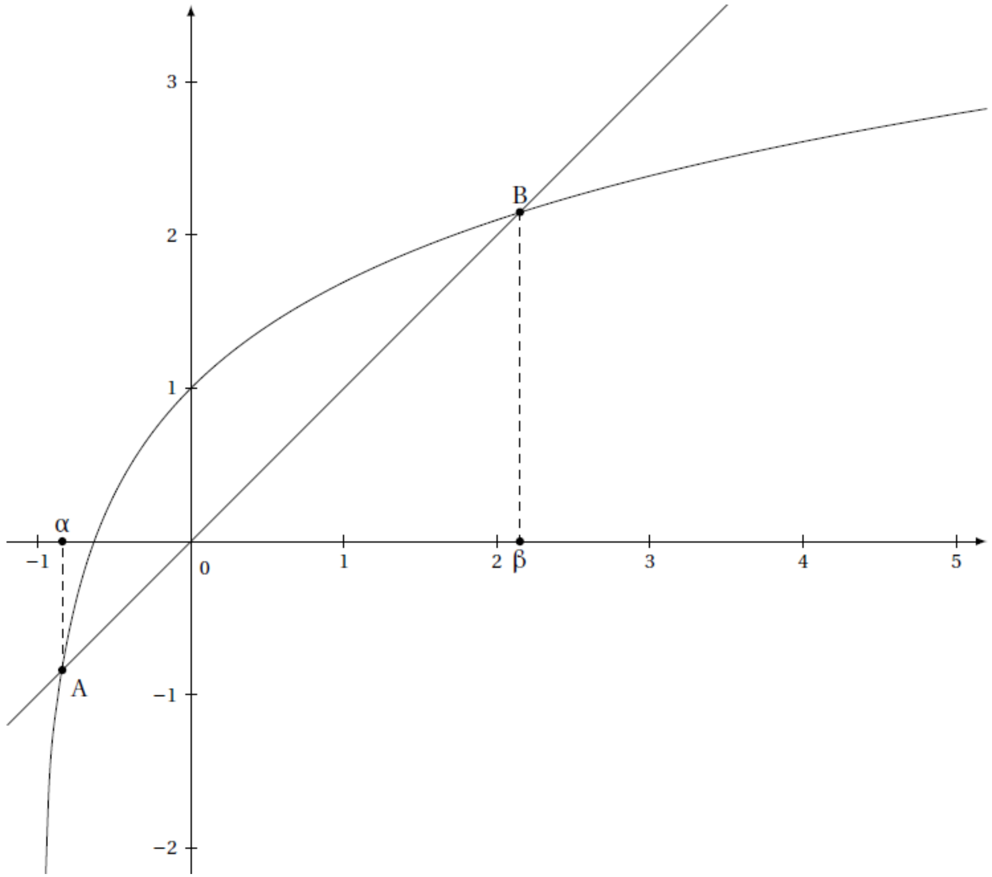
Signe de $g(x)$:

- $-1<x\leqslant\alpha \Longrightarrow g(x)\leqslant g(\alpha)=0$. (La fonction g est croissante sur $[-1;\alpha])$.
- $\alpha\leqslant x\leqslant 0 \Longrightarrow g(\alpha)=0\leqslant g(x)$. (La fonction g est croissante sur $[\alpha;0])$.
- $0\leqslant x\leqslant\beta \Longrightarrow g(x)\geqslant 0=g(\beta)$. (La fonction g est décroissante sur $[0;\beta])$.
- $x\geqslant\beta \Longrightarrow g(x)\leqslant 0=g(\beta)$. (La fonction g est décroissante sur $[\beta;+\infty])$.

x	-1		α		β		$+\infty$
Signe de $g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Position relative de $\mathscr{C}_f$ et de D		$\mathscr{C}_f<$ (D)	A	$\mathscr{C}_f>$ (D)	B	$\mathscr{C}_f<$ (D)	

Position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite D :

- $\mathscr{C}_f$ est située au dessus de la droite D pour $x\in]\alpha;\beta[$.
- $\mathscr{C}_f$ est située en dessous de la droite D pour $x\in]-1;\alpha[\cup]\beta;+\infty[$.



Partie B

Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Soit (u_n) la suite définie pour tout nombre entier naturel n par : $\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 2 \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \end{array}\right.$

1. Pour tout nombre entier naturel n, $2 \leqslant u_n \leqslant \beta$. Démonstration par réccurence :
   - On a $2 \leqslant u_0 = 2 \leqslant \beta$
   - Supposons que, pour un n donné, on ait : $2 \leqslant u_n \leqslant \beta$, alors, la fonction f étant croissante sur $[2\,;\beta]$:

$$2 \leqslant u_n \leqslant \beta \Longrightarrow \boxed{2} \leqslant 2,09861228867 \simeq f(2) \leqslant f(u_n) = \boxed{u_{n+1}} \leqslant f(\beta) = \boxed{\beta}$$

   - Ainsi, $\forall n,\ n \in \mathbb{N},\ 2 \leqslant u_n \leqslant \beta$.
2. La suite (u_n) est croissante (*en utilisant le signe de* $g(x)$ *étudié plus haut*) :

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n) \geqslant 0 \text{ sur } [2\,;\beta]$$

   Donc, (u_n) étant une suite croissante et majorée par β, elle est convergente.